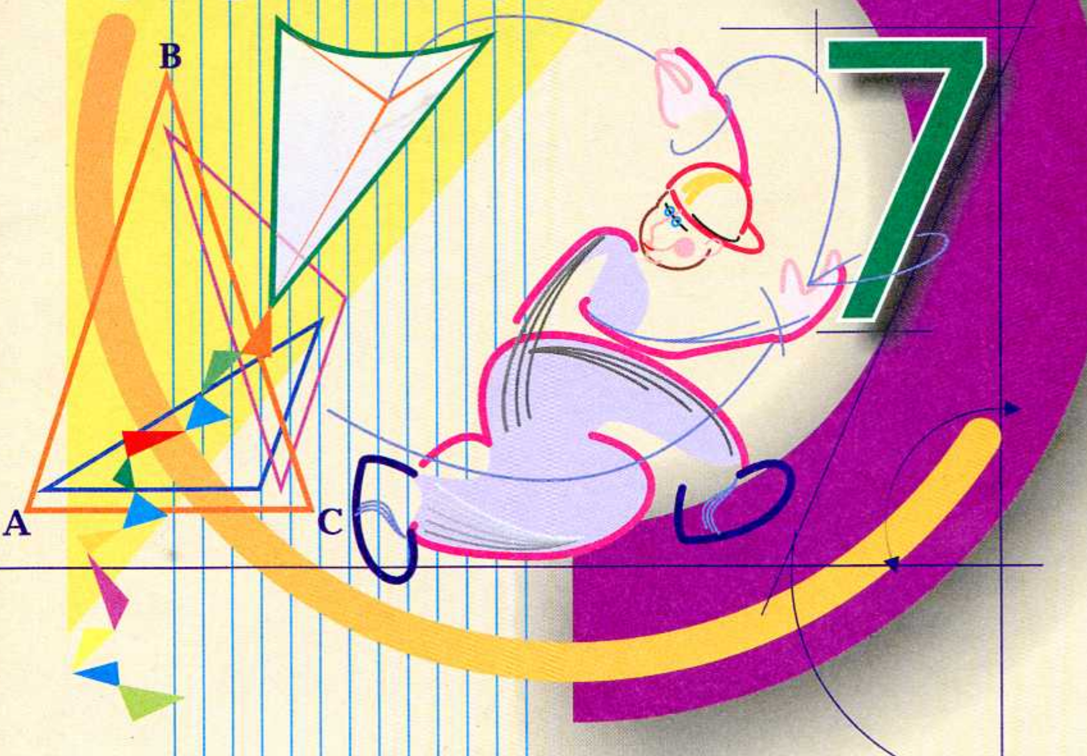
серия ШКОЛЬНЫЙ КОНСПЕКТ

Ершова А.П.
Голобородько В.В.
Крижановский А.Ф.

$a^2+b^2=c^2$

ТЕТРАДЬ-КОНСПЕКТ ПО ГЕОМЕТРИИ



ПО УЧЕБНИКУ
Атанасяна Л.С.

А.П. Ершова, В.В. Голобородько,
А.Ф. Крижановский

ТЕТРАДЬ-КОНСПЕКТ ПО ГЕОМЕТРИИ

(*по учебнику Л.С. Атанасяна и др.*)

учени____ 7—___ класса

____

____

____

____

Москва
ИЛЕКСА
2015

Рецензенты:

И.Л. Соловейчик — главный редактор приложения «Математика» к газете «Первое сентября», г. Москва;

В.А. Лысенко — учитель-методист Авторской школы Бойко, г. Харьков.

Ершова А.П., Голобородько В.В., Крижановский А.Ф.

Тетрадь-конспект по геометрии для 7 класса.— М.: ИЛЕКСА, 2015.— 96 с.

ISBN 978-5-89237-162-9

Тетрадь-конспект содержит все основные теоретические сведения — **определения, аксиомы, теоремы и следствия из них** — курса геометрии 7 класса (по учебнику Л.С. Атанасяна и др.). **Опорные задачи** содержат важные свойства геометрических фигур, не выраженные в теоремах. **Типовые задачи** описывают простейшие и более сложные геометрические ситуации, наиболее часто встречающиеся в тематических проверочных работах. **Полезные задачи** описывают дополнительные свойства изучаемых геометрических фигур. Ко всему материалу приведены чертежи, после теорем и задач оставлено место для самостоятельного заполнения учащимися. К отдельным теоремам и задачам приведены доказательства, решения или указания к решению.

Тетрадь-конспект поможет **существенно сэкономить время урока** учителям и школьникам.

ISBN 978-5-89237-162-9

Дорогие друзья!

Если вы уже купили эту тетрадь-конспект, то у вас наверняка есть свой собственный взгляд на ее эффективное использование. Если же вы раздумываете – покупать или не покупать, пригодится или будет лежать на полке, – то мы можем вкратце, учитывая собственный опыт работы с такими тетрадями, рассказать о той несомненной пользе, которую они приносят на практнке.

1. В этой тетради **уже проделана вся рутинная работа** по записи формулировок **<u>определений</u>**, **<u>аксиом</u>**, **<u>теорем</u>** и построению чертежей – вам только остается заполнить необходимые доказательства и решения, причем не обязательно в том виде, в котором они приведены в учебнике.
2. Формулировки **<u>опорных задач</u>**, которые, как правило, под диктовку записываются в обычную рабочую тетрадь во время урока или, в худшем случае, выискиваются в учебнике, уже выбраны из учебника и лучших книг по геометрии, и вам только остается грамотно доказать эти важные свойства геометрических фигур и применять их на практике. Многие из опорных задач в других учебниках названы теоремами, что говорит в пользу их важности. Каждая теорема и опорная задача имеет название, что облегчит вам ссылку на нее в решении других задач.
3. В этой тетради много ***типовых задач***, то есть задач, подобные которым часто встречаются на самостоятельных, контрольных и тематических работах. Их решения желательно оформить **как образец** с учетом всех действующих требований – это облегчит подготовку ко всем письменным работам, в том числе и к экзаменам.
4. Для **более глубокого изучения** геометрии предназначены ***полезные задачи***, в которых описаны дополнительные свойства изучаемых фигур илн представлены оригинальные геометрические идеи. Эти задачи решаются в тетрадях для практических работ. Много интересного дополнительного материала вы найдете и в главе «Приложение».

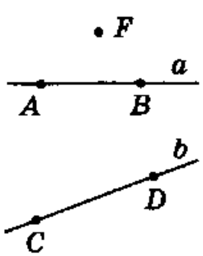
И, наконец, эта тетрадь создавалась, в первую очередь, для того, чтобы
существенно сэкономить время
урока и ваше личное время.

Желаем вам успехов!

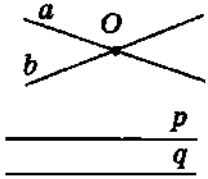
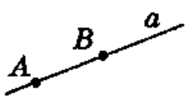
НАЧАЛЬНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Основные понятия геометрии	**Геометрия** – это наука о свойствах фигур на плоскости и в пространстве. **Планиметрия** – это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур на плоскости. **Стереометрия** – это раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур в пространстве. Свойства фигур выражаются различными утверждениями: **определениями, аксиомами, теоремами, следствиями.** **Определением** называется утверждение, которое разъясняет данное понятие через уже известные понятия. **Аксиомой** называется утверждение, которое принимают без доказательства. **Теоремой** называется утверждение, которое доказывают с помощью определений, аксиом и ранее доказанных теорем. **Следствием** из данной теоремы (аксиомы) называется утверждение, которое вытекает из теоремы (аксиомы).

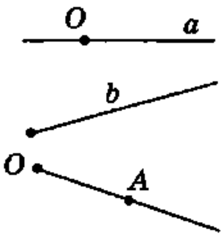
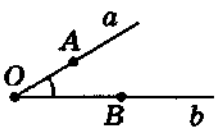
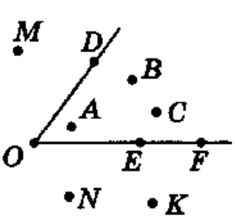
Прямая и отрезок

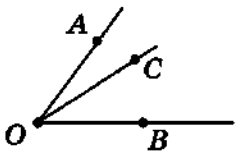
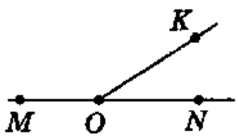
Основные геометрические фигуры на плоскости 	Основными геометрическими фигурами на плоскости являются **точка и прямая.** Это неопределяемые понятия. **Через любые две точки* можно провести прямую, и притом только одну.** *Обозначение.* Точки обозначаются большими латинскими буквами (A, B, C, D,...). Прямые обозначаются малыми латинскими буквами (a, b, c,...) или двумя большими буквами (AB, CD,...) по двум точкам, принадлежащим прямой. Существуют точки, принадлежащие прямой, и не принадлежащие ей. Точка A принадлежит прямой a, точка F не принадлежит прямой a. Эти свойства кратко обозначаются так: $A \in a$, $F \notin a$.

* Здесь и в дальнейшем, говоря «две точки», «три точки», «две прямые» и т. д., будем считать, что эти точки, прямые различны.

Взаимное расположение двух прямых 	**Прямые пересекаются**, если они имеют общую точку. Прямые a и b пересекаются в точке O, а прямые p и q не пересекаются. **Две прямые либо имеют только одну общую точку, либо не имеют общих точек.** *Доказательство.*
Определение отрезка 	**Отрезком** называется часть прямой, ограниченная двумя точками (**концами отрезка**). Концы отрезка также входят в отрезок. ***Обозначение.*** Отрезок обозначается записью его концов в любом порядке (AB или BA). Принадлежность отрезка AB прямой a обозначается так: $AB \subset a$.
Типовая задача	*Проведите прямую а и отметьте:* *а) точки A и B, лежащие на ней;* *б) точки C и D, не лежащие на ней;* *в) точку E, лежащую на прямой a, но не лежащую на отрезке AB;* *г) точку F, лежащую на отрезке CD.* *Всегда ли пересекаются прямые AB и CD?* *Всегда ли отрезки AB и CD имеют общие точки?* *Решение.*

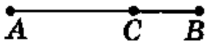
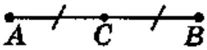
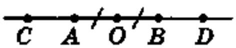
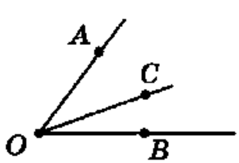
Луч и угол

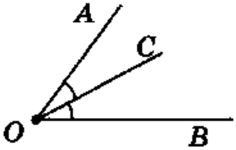
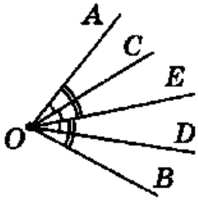
Определение луча 	**Лучом**, исходящим из точки *O*, лежащей на некоторой прямой, называется любая из двух частей, на которые точка *O* делит эту прямую. ***Обозначение.*** Луч обозначается либо малой латинской буквой, либо двумя большими латинскими буквами, первая из которых обозначает начало луча, а вторая – какую-нибудь точку на луче. На рисунке изображены лучи *b* и *OA* (но не *AO*!).
Определение угла 	**Угол** – это геометрическая фигура, состоящая из точки **(вершины угла)** и двух лучей, выходящих из этой точки **(сторон угла)**. ***Обозначение.*** Угол обозначается одним из трех способов: $\angle O$, $\angle AOB$ (или $\angle BOA$), $\angle ab$ (см. рисунок). Иногда для краткости угол обозначается цифрой или малой греческой буквой (α, β, γ,...).
Определение развернутого угла 	Угол называется **развернутым**, если обе его стороны лежат на одной прямой. $\angle AOB$ – развернутый угол.
Определение внутренней и внешней областей угла 	Любой неразвернутый угол делит плоскость на две части: **внутреннюю и внешнюю области этого угла.** Точки *A*, *B* и *C* лежат внутри угла *DOE*, точки *D*, *E* и *F* – на сторонах угла, точки *M*, *N* и *K* – вне угла. ***Замечание.*** Фигуру, состоящую из угла и его внутренней области, также называют углом. Если угол развернутый, то любую из двух частей, на которые он делит плоскость, можно считать внутренней областью угла.

  	**Если луч исходит из вершины неразвернутого угла и проходит внутри угла, то он делит этот угол на два угла.** **Луч *OC* делит угол *AOB* на два угла *AOC* и *COB*.** **Если угол развернутый, то любой луч, не совпадающий с его сторонами, делит этот угол на два угла.** **Луч *OK* делит развернутый угол *MON* на два угла *MOK* и *NOK*.**
Типовая задача	***Проведите три луча OA, OB и OC так, чтобы образовался неразвернутый угол AOB и развернутый угол AOC. Проведите луч OD, который делит угол BOC на два угла. Назовите все неразвернутые углы, образованные данными лучами.*** ***Решение.***

Сравнение отрезков и углов

Определение равенства геометрических фигур	**Две геометрические фигуры называются равными, если их можно совместить наложением.**

Сравнение отрезков 	**Два отрезка равны**, если эти отрезки полностью совмещаются наложением. Если отрезки наложением не совмещаются, то **меньшим** считается тот, который составляет часть другого. ***Обозначение.*** $AC < AB$.
Определение середины отрезка 	Точка отрезка, делящая его пополам, т. е. на два равных отрезка, называется **серединой отрезка**. $AC = BC$, C – середина отрезка AB.
Типовая задача 	*Точки A, B, C и D лежат на одной прямой. Точка O – середина отрезков AB и CD. Сравните отрезки AC и BD, AC и BC.* *Решение.*
Сравнение углов 	**Два угла равны**, если эти углы полностью совмещаются наложением. Если углы наложением не совмещаются, то **меньшим** считается тот, который составляет часть другого. ***Обозначение.*** $\angle AOC < \angle AOB$. Развернутый угол больше любого неразвернутого угла. Любые два развернутых угла равны.
Определение биссектрисы угла	Луч, исходящий из вершины угла и делящий его на два равных угла, называется **биссектрисой** угла.

<table>
<tr><td>
</td><td>OC – биссектриса угла AOB, $\angle AOC=\angle BOC$.</td></tr>
<tr><td>Типовая задача

</td><td>OE – биссектриса углов AOB и COD, OC – биссектриса угла AOE. Сравните углы AOC и BOD, BOD и COE.

Решение.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Измерение отрезков</td></tr>
<tr><td>Длина отрезка</td><td>Измерение отрезков основано на сравнении их с некоторым отрезком, принятым за единицу измерения (масштабным отрезком).

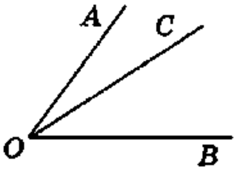
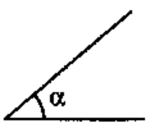
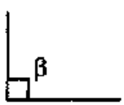
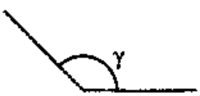
Выбрав единицу измерения, можно измерить любой отрезок, т.е. выразить длину некоторым положительным числом.
Равные отрезки имеют равные длины.
Меньший отрезок имеет меньшую длину.
Если точка делит отрезок на два отрезка, длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков.
Длина отрезка называется также расстоянием между концами этого отрезка.

Замечания.
1) Часто под словом «отрезок» подразумевается его длина.
2) Каждый отрезок имеет определенную длину в заданных единицах измерения.</td></tr>
</table>

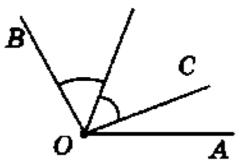
Типовая задача	***Точки А, В и С лежат на одной прямой, АВ = 28 см, ВС = = 18 см. Какой может быть длина отрезка АС?*** ***Решение.***

Измерение углов

Измерение углов	Измерение углов основано на сравнении их с некоторым углом, принятым за **единицу измерения.** **Единицы измерения углов** **Градус** – угол, равный $\frac{1}{180}$ части развернутого угла. **Минута** – $\frac{1}{60}$ часть градуса. **Секунда** – $\frac{1}{60}$ часть минуты. Положительное число, которое показывает, сколько раз градус и его части укладываются в данном угле, называется **градусной мерой угла.** ***Обозначение.*** Градусы обозначаются знаком «°», минуты – «′», секунды –«″». Например, угол в 55 градусов, 7 минут, 27 секунд обозначается так: 55°7′27″.
Свойства измерения углов	**1. Равные углы имеют равные градусные меры.** **2. Меньший угол имеет меньшую градусную меру.** **3. Развернутый угол равен 180°.** **4. Неразвернутый угол меньше 180°.**

	**Если луч делит угол на два угла, градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.** $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$. ***Замечания.*** 1) Иногда рассматривается угол с нулевой градусной мерой. 2) Часто под словом «угол» подразумевается его градусная мера. 3) Обычно рассматривают меньший из углов, определяемых двумя лучами.
Виды углов   	1. **Острым углом** называется угол, больший 0° и меньший 90° ($0° < \alpha < 90°$). 2. **Прямым углом** называется угол, равный 90° ($\beta = 90°$). 3. **Тупым углом** называется угол, больший 90° и меньший 180° ($90° < \gamma < 180°$).
Типовая задача	*Угол между биссектрисой данного угла и его стороной на 36° меньше данного угла. Найдите данный угол.* *Решение.*

Типовая задача



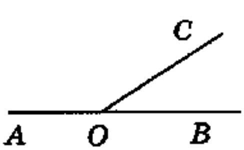
Угол AOB, равный 144°, разделен лучом OC в отношении 1:7, считая от луча OA. Найдите угол COB. Чему равен угол, образованный лучом OA и биссектрисой угла COB?

Решение.

Ответ: 126°; 81°.

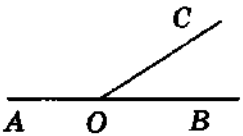
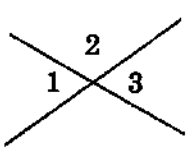
Смежные и вертикальные углы

Определение смежных углов

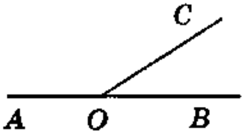


Два угла, у которых одна сторона общая, а две другие являются продолжениями одна другой, называются **смежными**.

$\angle AOC$ и $\angle BOC$ — смежные, OC — общая сторона, стороны OA и OB — продолжения одна другой.

<u>**Теорема**</u> ***(о смежных углах)***  	**Сумма смежных углов равна 180°.** *Доказательство.*
<u>**Следствия**</u>  	**1. Угол, смежный с прямым углом, также является прямым.** **2. Угол, смежный с острым, — тупой.** **3. Угол, смежный с тупым, — острый.** **4. Если смежные углы равны, то они – прямые.** **5. Если два угла равны, то смежные с ними углы равны.** **6. Два угла, смежные с одним и тем же углом, равны.** *Доказательство.*
Полезная задача	*Сумма двух углов, имеющих общую сторону, равна* 180°. *Верно ли, что эти углы являются смежными?*

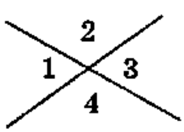
Типовая задача



Найдите смежные углы, если один из них в 8 раз больше другого.

Решение.

Определение вертикальных углов



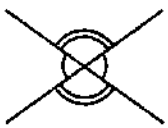
Два угла называются вертикальными, если стороны одного угла являются продолжениями сторон другого.

$\angle 1$ и $\angle 3$, а также $\angle 2$ и $\angle 4$ — две пары вертикальных углов.

Теорема
(*о вертикальных углах*)

Вертикальные углы равны.

Доказательство.

<u>**Следствие**</u> 	**При пересечении двух прямых образуются две пары равных углов.**
Полезная задача	***Верно ли, что два равных угла, имеющие общую вершину, являются вертикальными?***
Типовая задача	***Разность двух углов, образованных при пересечении двух прямых, равна 54°. Найдите все образовавшиеся углы.*** ***Решение.*** ***Ответ*: 63° *и* 117°.**

Полезная задача

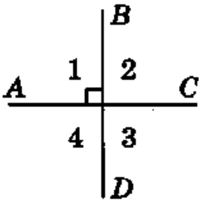
Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

Полезная задача

Верно ли, что два равных угла, биссектрисы которых лежат на одной прямой, являются вертикальными?

Перпендикулярные прямые

Определение перпендикулярных прямых



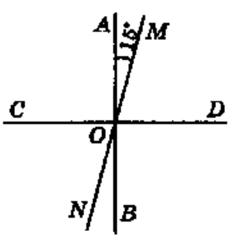
Две пересекающиеся прямые называются перпендикулярными (или взаимно перпендикулярными), если они образуют четыре прямых угла.

Прямые AC и BD перпендикулярны,

$$\angle 1=\angle 2=\angle 3=\angle 4=90^\circ.$$

Обозначение. **Перпендикулярность прямых AC и BD обозначается так: $AC \perp BD$.**

Типовая задача



Три прямые AB, CD и MN пересекаются в точке O, $AB \perp CD$, $\angle AOM=15^\circ$. Найдите $\angle AON$ и угол между биссектрисами углов BON и COM.

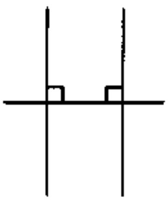
Решение.

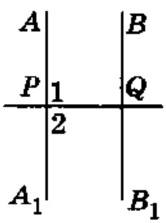
Ответ: **165°; 135°.**

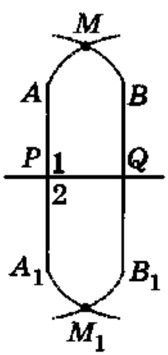
<u>Теорема</u>
(о двух прямых, перпендикулярных к третьей)

Две прямые, перпендикулярные к третьей, не пересекаются.

Доказательство.





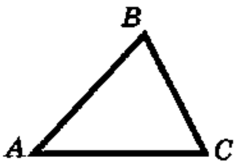
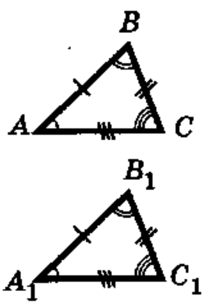


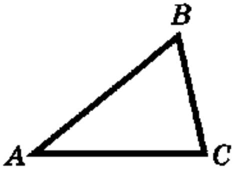
Полезная задача

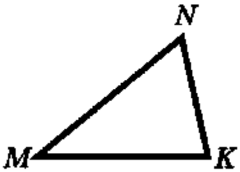
Докажите, что биссектрисы двух смежных углов образуют угол 90°.

Дополнительные сведения и задачи по теме

ТРЕУГОЛЬНИКИ

Определение треугольника и его элементов 	**Треугольником** называется фигура, которая состоит из трех точек (**вершин**), не лежащих на одной прямой, и трех отрезков (**сторон**), попарно соединяющих эти точки. ***Обозначение.*** Треугольник обозначается значком Δ и перечислением трех его вершин в любом порядке: ΔABC. A, B, C – **вершины** ΔABC, AB, BC, AC – **стороны** ΔABC, $\angle ABC$, $\angle BAC$, $\angle ACB$ (или $\angle B$, $\angle A$, $\angle C$) – **углы** ΔABC. ***Замечание.*** Стороны и углы треугольника называются также **элементами треугольника**.
Определение периметра треугольника	**Периметром** треугольника называется сумма длин всех его сторон: $P_{\Delta ABC} = AB + BC + AC$.
Определение равных треугольников 	**Два треугольника называются равными**, если их можно совместить наложением. Если два треугольника равны, то **элементы** (т.е. стороны и углы) одного треугольника соответственно равны элементам другого треугольника. **В равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы.** И обратно: **против соответственно равных углов лежат равные стороны.** ***Обозначение.*** Равенство треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ обозначается так: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. ***Замечание.*** Равенство двух треугольников означает три равенства для соответствующих сторон и три равенства для соответствующих углов. Так, если $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, то: $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$, $BC = B_1C_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1$.
Типовая задача	*Треугольники ABC и MNK равны, причем $AC = MK$, $BC = NK$, $BC = 6$ см, $KM = 7$ см, $P_{\Delta MNK} = 18$ см. Найдите AB.*





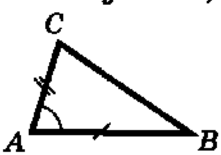
Решение.

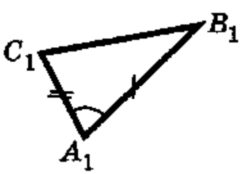
Первый признак равенства треугольников

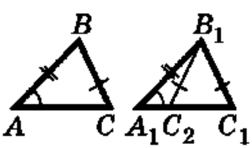
<u>Теорема</u>
(*первый признак равенства треугольников — по двум сторонам и углу между ними*)

Если две стороны и угол между ними одного треугольника соответственно равны двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство.

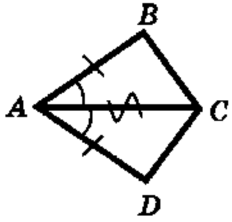






Замечание. Если в формулировке теоремы убрать слова «между ними», то вывод теоремы может быть неверным. Например: $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, но $\Delta ABC \neq \Delta A_1B_1C_2$.

Типовая задача

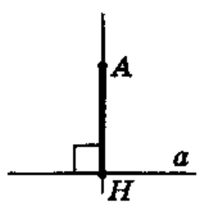


Докажите равенство треугольников ABC и ADC, если $AB = AD$ и $\angle BAC = \angle DAC$.

Доказательство.

Медианы, биссектрисы и высоты треугольника

Определение перпендикуляра к данной прямой



Перпендикуляром к данной прямой, опущенным из данной точки, называется отрезок прямой, перпендикулярной к данной, одним из концов которого является точка пересечения данных прямых (**основание перпендикуляра**).

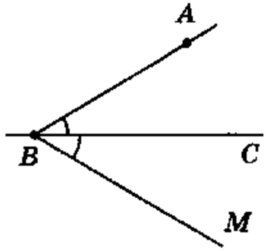
AH — перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой a, H — основание перпендикуляра AH.

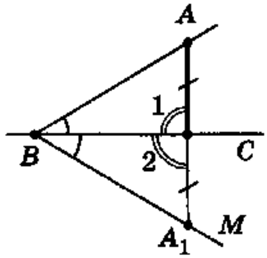
Теорема
(*о перпендикуляре к прямой, проведенном из точки, не лежащей на прямой*)

Из точки, не лежащей на прямой, можно провести перпендикуляр к этой прямой, и притом только один.

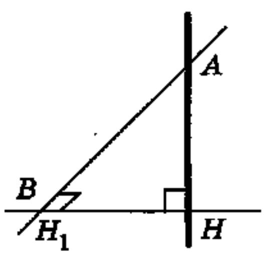
Доказательство.

Существование.

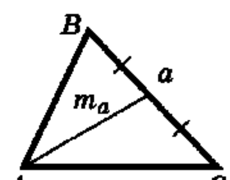




Единственность.

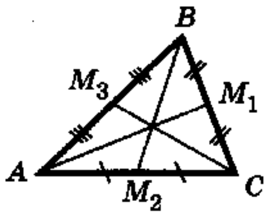
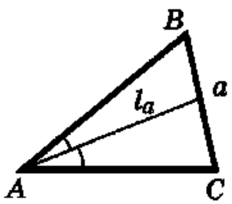
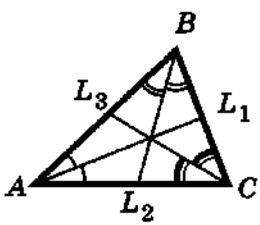
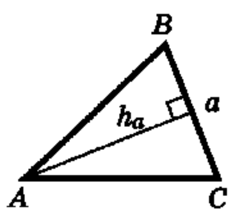
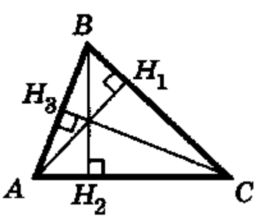


Определение медианы треугольника



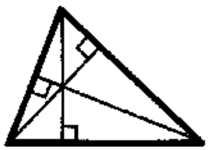
Отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны, называется **медианой** треугольника.

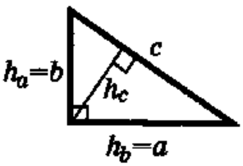
Обозначение. Часто медиана, проведенная из вершины A к стороне a, обозначается m_a.

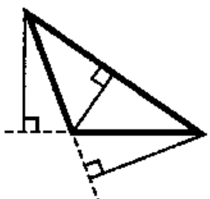
	Любой треугольник имеет три медианы. AM_1, BM_2, CM_3 – медианы треугольника ABC.
Определение биссектрисы треугольника	Отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны, называется **биссектрисой треугольника.**
	***Обозначение.*** Часто биссектриса, проведенная из вершины A к стороне a, обозначается l_a.
	Любой треугольник имеет три биссектрисы. AL_1, BL_2, CL_3 – биссектрисы треугольника ABC. ***Замечание.*** Биссектриса угла – это луч, а биссектриса треугольника – это отрезок.
Определение высоты треугольника	Перпендикуляр, проведенный из вершины треугольника к прямой, содержащей противоположную сторону, называется **высотой треугольника.**
	***Обозначение.*** Часто высота, проведенная из вершины A к стороне a, обозначается h_a.
	Любой треугольник имеет три высоты. AH_1, BH_2, CH_3 – высоты треугольника ABC.

<table>
<tr>
<td>

Высоты в остроугольном, прямоугольном, тупоугольном треугольниках







</td>
<td>

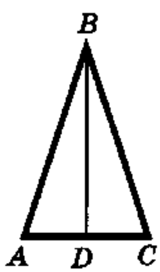
Три высоты остроугольного треугольника расположены внутри треугольника.

Две высоты прямоугольного треугольника, проведенные из вершин острых углов, совпадают с его сторонами (катетами).

Две высоты тупоугольного треугольника, проведенные из вершин острых углов, расположены вне треугольника.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Типовая задача



</td>
<td>

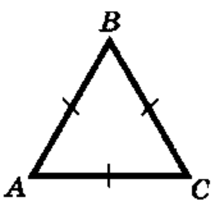
Треугольники ABD и CBD равны, причем точки A, D и C лежат на одной прямой. Докажите, что BD – медиана, биссектриса и высота треугольника ABC.

Решение.

</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><td><u>Теорема</u>
(свойства медиан, биссектрис и высот треугольника)</td><td>В любом треугольнике медианы пересекаются в одной точке (центроиде), биссектрисы пересекаются в одной точке (инцентре), высоты или их продолжения пересекаются в одной точке (ортоцентре).
Эти утверждения будут доказаны в 8 классе.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Равнобедренный треугольник</td></tr>
<tr><td>Определение равнобедренного треугольника
</td><td>Треугольник называется равнобедренным, если две его стороны равны.

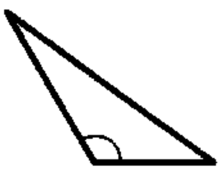
Равные стороны называются боковыми сторонами, а третья сторона — основанием треугольника. Вершину, противолежащую основанию, иногда называют вершиной равнобедренного треугольника.

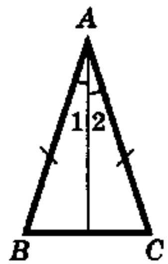
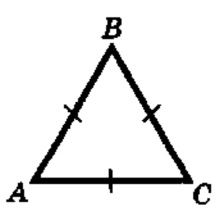
ΔABC — равнобедренный треугольник, $AB=BC$ — боковые стороны, AC — основание, B — вершина равнобедренного треугольника.</td></tr>
<tr><td>Определение равностороннего треугольника
</td><td>Треугольник называется равносторонним, если у него все стороны равны.

ΔABC – равносторонний треугольник, $AB=BC=AC$.</td></tr>
<tr><td>Классификация треугольников по длине сторон

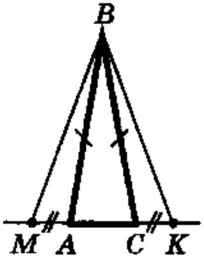
</td><td>Разносторонние треугольники – треугольники, у которых все стороны разной длины.

Равнобедренные (не равносторонние) треугольники – треугольники, у которых только две стороны равны.</td></tr>
</table>

	**Равносторонние** треугольники – треугольники, у которых три стороны равны.
Классификация треугольников по величине углов 	**Остроугольные** треугольники – треугольники, у которых все три угла острые.
	**Тупоугольные** треугольники – треугольники, у которых есть тупой угол.
	**Прямоугольные** треугольники – треугольники, у которых есть прямой угол. Сторона прямоугольного треугольника, лежащая против прямого угла, называется **гипотенузой**, а две другие стороны – **катетами.**
Типовая задача 	*Периметр равнобедренного треугольника равен* 65 *см, а основание относится к боковой стороне как* 3:5. *Найдите стороны этого треугольника.* *Решение.*

	Ответ: 15 см, 25 см, 25 см.
<u>Теорема</u> **(*свойство углов равнобедренного треугольника*)** 	**В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.** *Доказательство.*
<u>Опорная задача</u> **(*свойство углов равностороннего треугольника*)** 	**В равностороннем треугольнике все углы равны.** *Доказательство.*

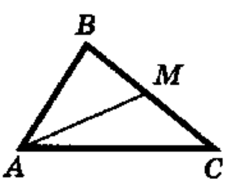
Типовая задача

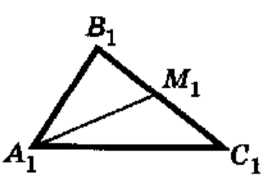


На прямой, содержащей основание АС равнобедренного треугольника АВС, отмечены точки М и К так, что АМ = СК (см. рис.). Докажите, что треугольник МВК – равнобедренный.

Решение.

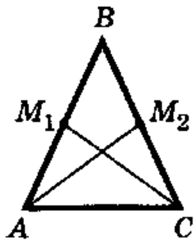
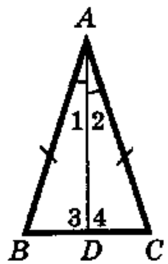
<u>**Опорная задача**</u>
(*о равенстве соответствующих медиан равных треугольников*)

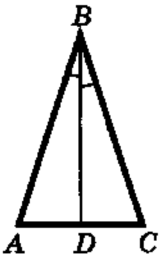
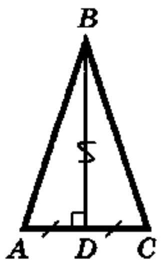




В равных треугольниках медианы, проведенные к равным сторонам, равны.

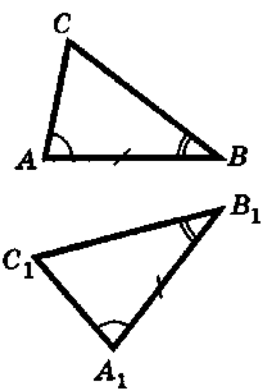
Доказательство.

<u>**Опорная задача**</u> **(*о равенстве двух медиан в равнобедренном треугольнике*)** 	**В равнобедренном треугольнике медианы, проведенные к боковым сторонам, равны.** *Доказательство.*
<u>**Теорема**</u> **(*свойство биссектрисы равнобедренного треугольника*)** 	**В равнобедренном треугольнике биссектриса, проведенная к основанию, является медианой и высотой.** *Доказательство.*
<u>**Следствие**</u>	**В равнобедренном треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные к основанию, совпадают.** Поэтому справедливы также утверждения: 1. **Высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является медианой и биссектрисой.**

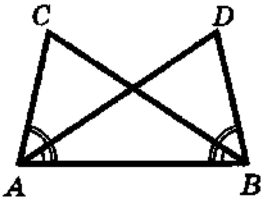
	2. Медиана равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой.
Типовая задача 	*В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса BD. Периметр треугольника ABC равен 18 см, а периметр треугольника ABD равен 12 см. Найдите длину BD.* *Решение.*
<u>Опорная задача</u> ***(признак равнобедренного треугольника по совпадающим медиане и высоте)*** 	**Если медиана треугольника совпадает с его высотой, то он равнобедренный.** *Доказательство.*

Полезная задача	*Докажите признак равенства равнобедренных треугольников по боковой стороне и углу, противолежащему основанию.*
Полезная задача	*Докажите признак равенства равнобедренных треугольников по основанию и медиане, проведенной к основанию.*
Полезная задача	*Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника являются вершинами другого равнобедренного треугольника.*

Второй и третий признаки равенства треугольников

Теорема ***(второй признак равенства треугольников – по стороне и двум прилежащим углам)*** 	**Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника соответственно равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.** *Доказательство.*

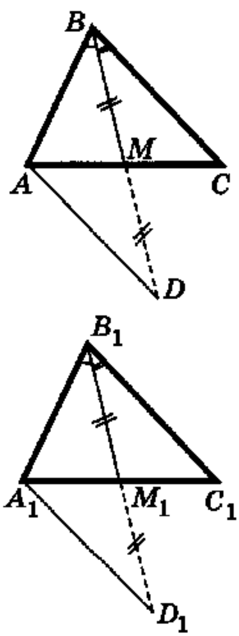
Типовая задача



У треугольников ABC и ABD ∠CAB = ∠DBA, ∠CBA = ∠DAB. Найдите BD, если AC = 7см.

Решение.

Типовая задача



Докажите равенство треугольников по медиане и двум углам, на которые медиана разбивает угол треугольника.

План решения.

В данных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ удвойте медианы BM и B_1M_1: $BM = MD$, $B_1M_1 = M_1D_1$.

1. $\Delta AMD = \Delta CMB$, $\Delta A_1M_1D_1 = \Delta C_1M_1B_1$ (*1-ый признак*).

Из равенства этих треугольников следуют равенства: $AD = BC$, $A_1D_1 = B_1C_1$, $\angle ADM = \angle CBM = \angle A_1D_1M_1 = \angle C_1B_1M_1$.

2. $\Delta ABD = \Delta A_1B_1D_1$ (*2-ой признак*).

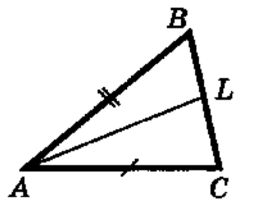
Из равенства этих треугольников следуют равенства: $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$, *а значит,* $BC = AD = B_1C_1 = A_1D_1$.

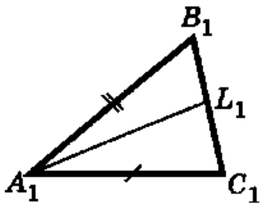
3. $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ (*1-ый признак*).

Метод удвоения медианы

Часто при решении задач с медианами треугольника используется примененный в данной задаче ***метод удвоения медианы***, то есть построения на продолжении медианы отрезка, равного ей.

Опорная задача
(*о равенстве соответствующих биссектрис равных треугольников*)

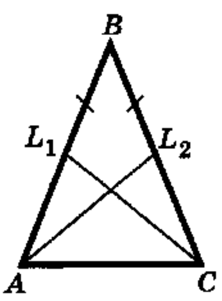




В равных треугольниках биссектрисы, проведенные к равным сторонам, равны.

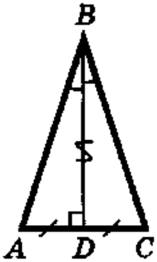
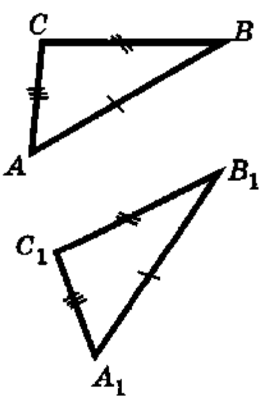
Доказательство.

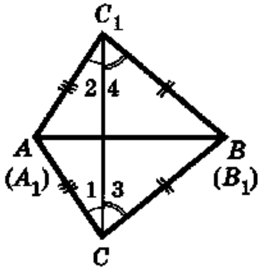
Опорная задача
(*о равенстве двух биссектрис в равнобедренном треугольнике*)

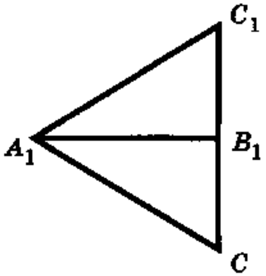


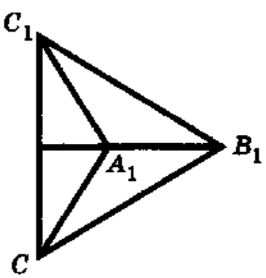
В равнобедренном треугольнике биссектрисы углов при основании равны.

Доказательство.

<u>**Опорная задача**</u> ***(признак равнобедренного треугольника по совпадающим высоте и биссектрисе)*** 	**Если в треугольнике высота совпадает с биссектрисой, то он равнобедренный.** *Доказательство.*
Полезная задача	*Докажите признак равенства равнобедренных треугольников по основанию и прилежащему к нему углу.*
Полезная задача	*Докажите признак равенства равнобедренных треугольников по углу, противолежащему основанию, и медиане, проведенной к основанию.*
<u>**Теорема**</u> ***(третий признак равенства треугольников – по трем сторонам)*** 	**Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны.** *Доказательство.*

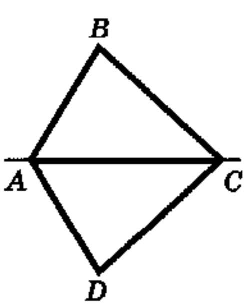






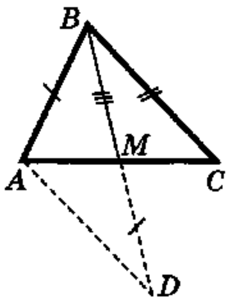
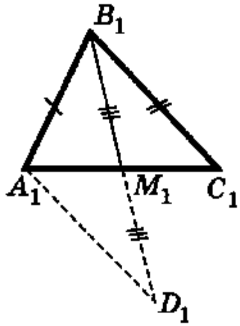
Замечание. **Из третьего признака равенства треугольников следует, что треугольник – жесткая фигура, т.е. в конструкции в виде треугольника с заданными сторонами нельзя изменить углы.**

Типовая задача



Точки B и D расположены по разные стороны от прямой AC так, что AB=AD, BC=CD. Докажите, что ∠ABC=∠ADC.

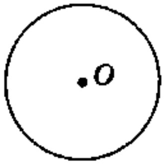
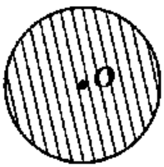
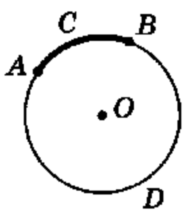
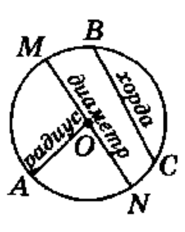
Доказательство.

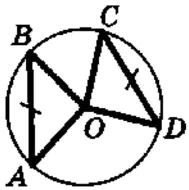
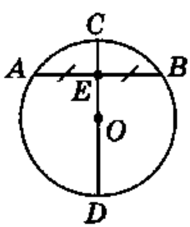
Типовая задача   	***Докажите равенство треугольников по двум сторонам и медиане, выходящим из одной вершины.*** ***Решение.*** *Указание:* удвойте медианы.
Полезная задача (признак равенства равносторонних треугольников)	***Если сторона одного равностороннего треугольника равна стороне другого равностороннего треугольника, то треугольники равны.*** ***Докажите.***

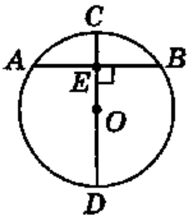
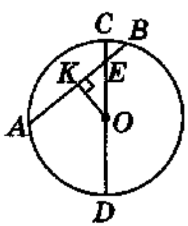
Дополнительные сведения и задачи по теме

ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

Окружность

Определение окружности  	**Окружностью** называется геометрическая фигура, состоящая из всех точек, расположенных на заданном расстоянии от данной точки **(центра окружности).** O – центр окружности. ***Замечание.*** Центр не является точкой окружности.
Определение круга  	**Круг** – это конечная часть плоскости, ограниченная окружностью.
Определение дуги окружности  	Части окружности, на которые ее делят любые две точки, называются **дугами.** ACB и ADB – дуги, ограниченные точками A и B.
Элементы окружности (круга)  	**Радиус** – это отрезок, соединяющий центр с какой-либо точкой окружности. OA – радиус. **Хорда** – это отрезок, соединяющий две точки окружности. BC – хорда. **Диаметр** – это хорда, проходящая через центр окружности. MN – диаметр. ***Обозначение.*** Радиус часто обозначается R или r, а диаметр – d. Очевидно, что $d=2R$.

Типовая задача 	***На рисунке изображена окружность с центром в точке О. Хорды АВ и CD равны. Докажите, что углы АОС и BOD равны.*** ***Решение.***
<u>Опорная задача</u> **(*о диаметре, проходящем через середину хорды*)** 	**Диаметр, проходящий через середину хорды, не являющейся диаметром, перпендикулярен к ней.** *Доказательство.*

<table>
<tr><td><u>Опорная задача</u>
(о диаметре, перпендикулярном к хорде)
</td><td>Диаметр, перпендикулярный к хорде, проходит через ее середину.
Доказательство.</td></tr>
<tr><td>Полезная задача
(о равных хордах)</td><td>Равные хорды равноудалены от центра окружности.[1]
Докажите.</td></tr>
<tr><td>Полезная задача
(о хордах, равноудаленных от центра)</td><td>Равноудаленные от центра окружности хорды равны.
Докажите.</td></tr>
<tr><td>Типовая задача
</td><td>Хорда пересекает диаметр под углом 30° и делит его на два отрезка длиной 4 см и 12 см. Найдите расстояние от центра окружности до данной хорды.
Решение.
Ответ: 2 см.</td></tr>
</table>

[1] Определение расстояния от точки до прямой приводится на стр. 86.

Задачи на построение

Инструменты для решения задач на построение	Элементарные построения выполняются с помощью чертежных инструментов. Чаще всего такими инструментами являются **линейка без масштабных делений** и **циркуль**.
Линейка без масштабных делений	С помощью линейки без масштабных делений можно провести: 1) произвольную прямую; 2) произвольную прямую, проходящую через данную точку; 3) прямую, проходящую через две данные точки. ***Замечание.*** Никаких других операций выполнять линейкой нельзя, например, нельзя откладывать отрезки заданной длины.
Циркуль	С помощью циркуля можно: 1) провести окружность произвольного радиуса; 2) провести окружность (дугу окружности) с центром в данной точке и радиусом, равным данному отрезку; 3) отложить данный отрезок на данной прямой.
Элементарные построения	1) обозначение одной или нескольких точек; 2) проведение прямой; 3) проведение окружности; 4) нахождение точки пересечения (двух прямых, прямой и окружности, двух окружностей).

Основные задачи на построение

Построение отрезка данной длины	**На данном луче от его начала отложить отрезок, равный данному.** *Решение.*

Построение угла, равного данному	**Отложить от данного луча угол, равный данному.** *Решение.*
Построение биссектрисы угла	**Построить биссектрису данного угла.** *Решение.*
Построение перпендикулярных прямых	**Даны прямая и точка на ней. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную к данной прямой.** *Решение.*

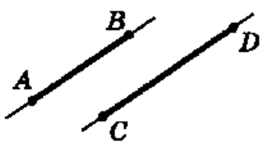
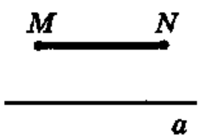
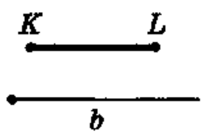
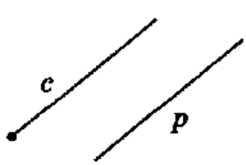
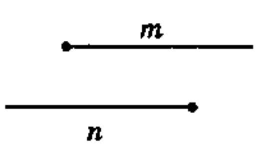
Построение середины отрезка	**Построить середину данного отрезка.** *Решение.*
Типовая задача	*Начертите произвольный остроугольный треугольник ABC и постройте в нем высоту AH, биссектрису BL и медиану CM.* *Решение.*

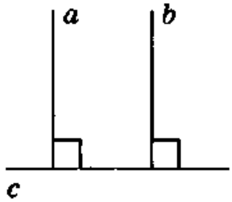
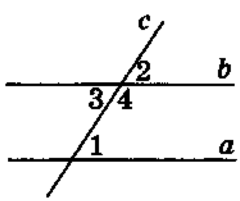
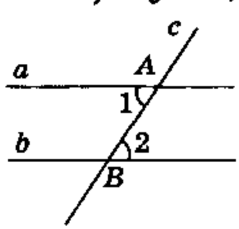
Типовая задача	***Постройте с помощью циркуля и линейки угол, равный 67°30′.*** ***Решение.*** *Указание.* **67°30′ = 45° + 45° : 2.**
Опорная задача ***(о построении прямой, перпендикулярной к данной и проходящей через точку, не лежащей на данной прямой)***	**Постройте прямую, проходящую через данную точку, не лежащую на данной прямой, и перпендикулярную к данной прямой.** ***Решение.***

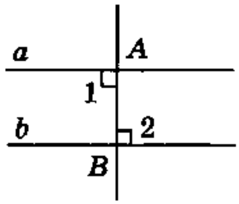
Дополнительные сведения и задачи по теме

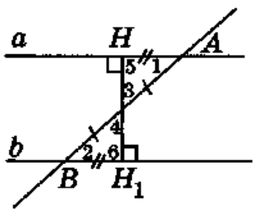
ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

Признаки параллельности двух прямых

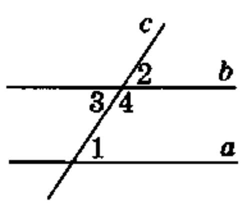
Определение параллельных прямых 	Две прямые на плоскости называются **параллельными**, если они не пересекаются. ***Обозначение.*** Параллельность прямых a и b обозначается так: $a \parallel b$.
Определение параллельных отрезков     	Два отрезка называются **параллельными**, если они лежат на параллельных прямых. ***Обозначение.*** $AB \parallel CD$. Аналогично определяется параллельность отрезка и прямой, отрезка и луча, луча и прямой, двух лучей. Отрезок MN параллелен прямой a. Отрезок KL параллелен лучу b. Луч c параллелен прямой p. Луч m параллелен лучу n.

Теорема ***(свойство двух прямых, перпендикулярных к третьей)***  	**Две прямые, перпендикулярные к третьей, параллельны.** *Доказательство.* ***Замечание.*** Данная теорема – другая формулировка теоремы о двух прямых, перпендикулярных к третьей, доказанной ранее.
Определение углов, образованных при пересечении двух прямых секущей  	Прямая c называется **секущей** по отношению к прямым a и b, если она пересекает каждую из них. При пересечении двух прямых третьей (секущей) образуются углы: **накрест лежащие** ($\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$); **односторонние** ($\angle 4$ и $\angle 5$, $\angle 3$ и $\angle 6$); **соответственные** ($\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$). ***Замечание.*** Часто применяются термины «внутренние накрест лежащие» и «внутренние односторонние» углы.
Теорема ***(признак параллельности прямых по равенству накрест лежащих углов)***  	**Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.** *Доказательство.*





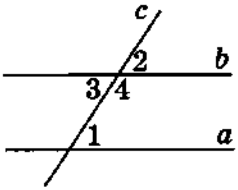
Теорема
(*признак параллельности прямых по равенству соответственных углов*)



Если при пересечении двух прямых секущей соответственные углы равны, то прямые параллельны.

Доказательство.

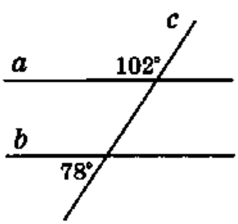
Теорема
(*признак параллельности прямых по сумме односторонних углов*)



Если при пересечении двух прямых сумма односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.

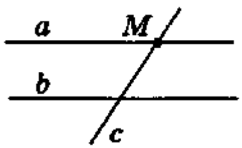
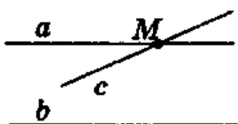
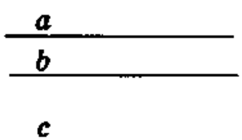
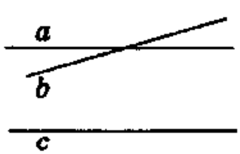
Доказательство.

Типовая задача

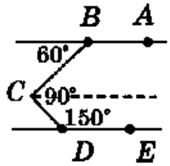


Параллельны ли прямые a и b, изображенные на рисунке?

Решение.

Полезная задача	*Докажите, что если накрест лежащие углы равны, то соответственные углы равны и сумма внутренних односторонних углов равна* 180°.
Аксиома параллельных прямых	
Аксиома параллельных прямых (аксиома Евклида)	**Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной.**
Следствия из аксиомы параллельных прямых  	**1. Если прямая пересекает одну из параллельных прямых, то она пересекает и другую.** *Доказательство.*
 	**2. Если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.** *Доказательство.*

Типовая задача



Параллельны ли прямые AB и ED?

Решение.

Виды теорем. Доказательство от противного

Виды теорем

В любой теореме различают две части: **условие** – это то, что дано, и **заключение** – это то, что надо доказать.

1. **Прямая теорема:**
   если есть A, то есть и B ($A \Rightarrow B$).
2. **Обратная теорема:**
   если есть B, то есть и A ($B \Rightarrow A$).
3. **Противоположная прямой:**
   если нет A, то нет и B (не $A \Rightarrow$ не B).
4. **Противоположная обратной (или обратная противоположной):**
   если нет B, то нет и A (не $B \Rightarrow$ не A).

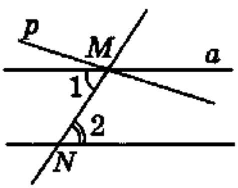
Свойства (необходимые условия) и признаки (достаточные условия)	**$A \Rightarrow B$:** **A – признак B (A – достаточное условие для B);** **B – свойство A (B – необходимое условие для A).**
Критерий (необходимое и достаточное условие)	**$A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$ обозначается** **$A \Leftrightarrow B$:** **A — критерий B (A — необходимое и достаточное условие для B).**
Схема доказательства теорем методом от противного ***Теорема:*** ***Если А, то В.*** ***Доказательство.*** **1.** ***Пусть не В.*** **2.** ***Рассуждения.*** **3.** ***Противоречие.*** **4.** ***Тогда В, значит, данная теорема верна.***	**Метод доказательства от противного основан на равносильности прямой и противоположной обратной теорем. Если доказательство одной из этих теорем вызывает трудности, то следует попытаться доказать другую.** **1. Делаем предположение, противоположное тому, что утверждается теоремой.** **2. Проводим рассуждения, опираясь на аксиомы и ранее доказанные теоремы.** **3. Приходим к выводу, противоречащему либо условию теоремы, либо одной из аксиом, либо доказанной ранее теореме.** **4. Заключаем, что наше предположение неверно, а значит, верно утверждение теоремы.**
Типовая задача	***Пусть даны утверждения:*** ***А – «Два угла являются вертикальными»;*** ***В – «Два угла равны».*** ***Сформулируйте теоремы четырех видов. Какие из них верны?*** ***Решение.***

Типовая задача	***Докажите методом от противного, что две различные прямые имеют не более одной общей точки.*** ***Решение.***
Полезная задача	***Пусть даны утверждения:*** ***A – «Два угла являются вертикальными»;*** ***B – «Два угла равны»;*** ***C – «Два угла смежны с одним и тем же углом».*** ***Из четырех теорем $A \Rightarrow B$, $A \Rightarrow C$, $B \Rightarrow A$, $C \Rightarrow A$ выберите свойства и признаки вертикальных углов. Какие из данных четырех теорем неверны?***

Теоремы об углах, образованных двумя параллельными прямыми и секущей

<table>
<tr>
<td>

<u>**Теорема**</u>
(*свойство накрест лежащих углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей*)



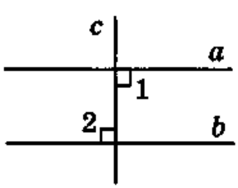
</td>
<td>

Если две параллельные прямые пересечены секущей, то накрест лежащие углы равны.

Доказательство.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

<u>**Следствие**</u>
(*свойство прямой, перпендикулярной к одной из двух параллельных прямых*)

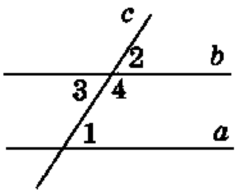
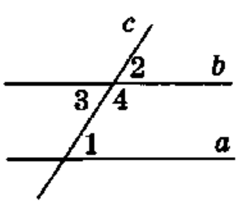


</td>
<td>

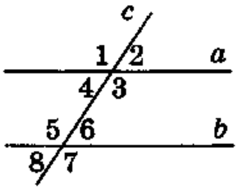
Если прямая перпендикулярна к одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

Доказательство.

</td>
</tr>
</table>

Теорема *(свойство соответственных углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей)* 	**Если две параллельные прямые пересечены секущей, то соответственные углы равны.** *Доказательство.*
Теорема *(свойство односторонних углов, образованных при пересечении параллельных прямых секущей)* 	**Если две параллельные прямые пересечены секущей, то сумма односторонних углов равна 180°.** *Доказательство.*

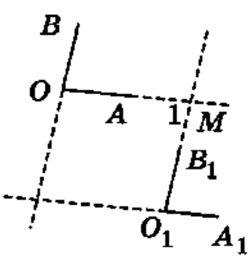
Типовая задача



При пересечении двух параллельных прямых секущей один из образовавшихся углов равен 67°. Найдите остальные углы.

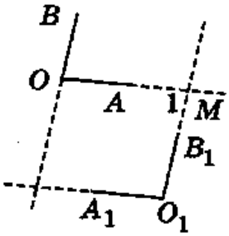
Решение.

<u>Опорная задача</u>
(*об углах с параллельными сторонами*)



Если стороны двух углов соответственно параллельны, то такие углы либо равны, либо их сумма равна 180°.

Доказательство.

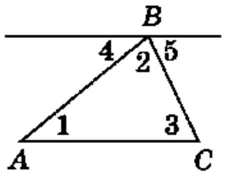
	
Полезные задачи	***Докажите, что если две параллельные прямые пересечены секущей, то :*** ***а) биссектрисы накрест лежащих углов параллельны;*** ***б) биссектрисы соответственных углов параллельны;*** ***в) биссектрисы односторонних углов перпендикулярны.***
Полезная задача (о прямых, параллельных перпендикулярным прямым)	***Докажите, что две различные прямые, соответственно параллельные перпендикулярным прямым, перпендикулярны между собой.***

Дополнительные сведения и задачи по теме

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ ТРЕУГОЛЬНИКА

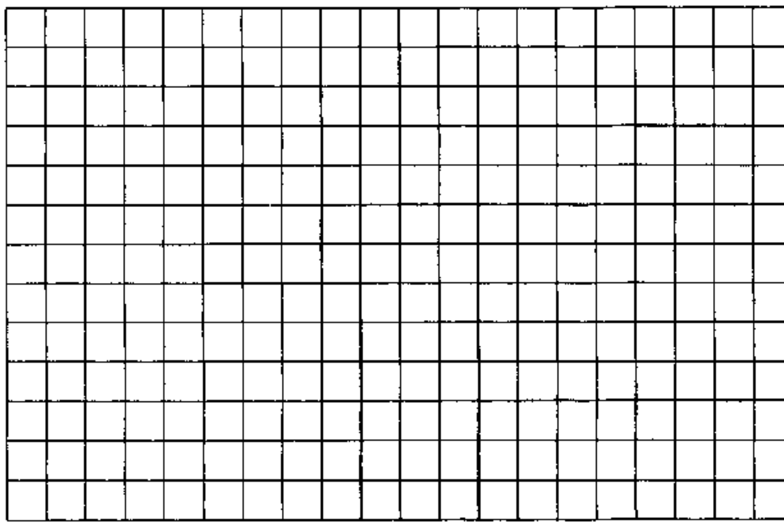
Сумма углов треугольника

Теорема
(*о сумме углов треугольника*)



Сумма углов треугольника равна 180°.

Доказательство.



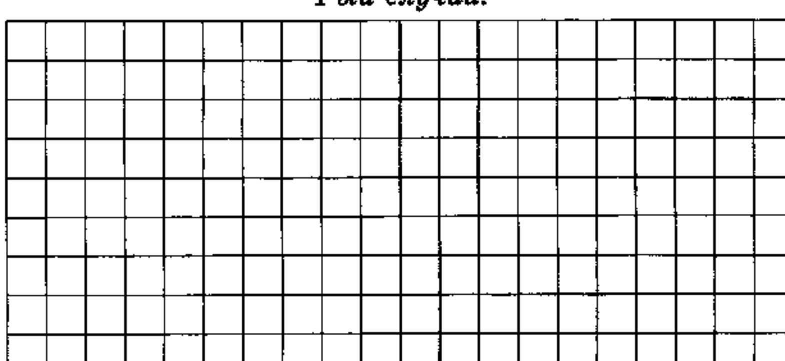
Следствие

В любом треугольнике либо все углы острые, либо два угла острые, а третий тупой или прямой.

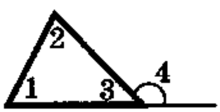
Типовая задача

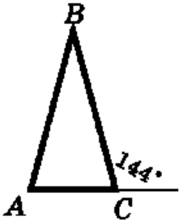
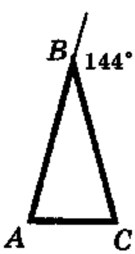
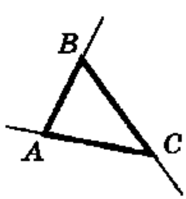
Найдите углы равнобедренного треугольника, если два из них относятся как 1:2.

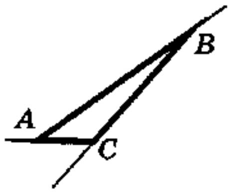
Решение.
1-*ый случай.*



	2-ой случай. *Ответ:* *или* .
<u>Опорная задача</u> ***(об углах равностороннего треугольника)***	**Каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.** *Доказательство.*
<u>Опорная задача</u> ***(о равнобедренном треугольнике с углом 60°)***	**Если в равнобедренном треугольнике хотя бы один угол равен 60°, то этот треугольник — равносторонний.** *Доказательство.*

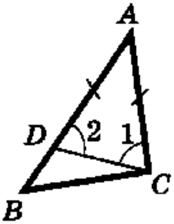
Полезная задача	***Докажите, что если в равнобедренном треугольнике угол при основании равен углу, противолежащему основанию, то этот треугольник – равносторонний.***
Полезная задача (об углах со взаимно перпендикулярными сторонами)	***Если стороны двух углов взаимно перпендикулярны, то либо эти углы равны, либо их сумма равна* 180°.**
Определение внешнего угла  	**Внешним углом** треугольника называется угол, смежный с каким-нибудь углом этого треугольника. При любой вершине треугольника есть два равных внешних угла. ***Замечание.*** Чтобы не путать угол треугольника при данной вершине с внешним углом при этой же вершине, его иногда называют *внутренним* углом.
Теорема ***(о внешнем угле треугольника)***  	**Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним.** *Доказательство.*
Следствие	**Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.**

Типовая задача	***Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 144°. Найдите углы треугольника.***
	***Решение.*** ***1-ый случай.***
	***2-ой случай.*** *Ответ*: **36°, 36°, 108°** *или* **36°, 72°, 72°.**
Опорная задача (*о сумме внешних углов треугольника*)	**Сумма внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине, равна 360°.**
	*Доказательство.*

Типовая задача  	***Внешние углы треугольника пропорциональны числам 3, 7, 8. Найдите углы треугольника.*** *Решение.* *Ответ*: 120°, 40°, 20°.
Полезная задача	***Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, противолежащей основанию, параллельна основанию.***
Полезная задача (о положении оснований высот в треугольнике)	***Основания высот в остроугольном треугольнике лежат на сторонах треугольника.*** ***Основание высоты, проведенной из вершины тупого угла треугольника, лежит на стороне треугольника, а из двух других вершин – на продолжении сторон.*** ***Докажите эти утверждения.***

Соотношения между сторонами и углами треугольника

Теорема ***(о соотношениях между сторонами и углами треугольника)***	**В треугольнике: 1) против большей стороны лежит больший угол;** **2)** обратно, **против большего угла лежит большая сторона.** *Доказательство.*

	
<u>Следствие 1</u>	**В прямоугольном треугольнике гипотенуза больше катета.** *Доказательство.*
<u>Следствие 2</u> **(*признак равнобедренного треугольника по двум равным углам*)**	**Если два угла треугольника равны, то треугольник равнобедренный.** *Доказательство.*

Типовая задача

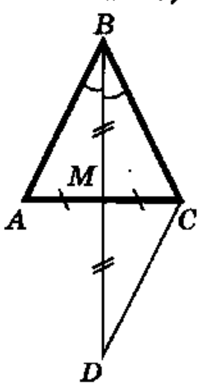
В треугольнике ABC проведена биссектриса BP, ∠PBC=20°, ∠BAP=40°. Сравните длину биссектрисы со сторонами треугольника.

Решение.

Типовая задача

В треугольнике ABC ∠A=∠C, AM=CK. Докажите, что ∠BMK=∠BKM.

Решение.

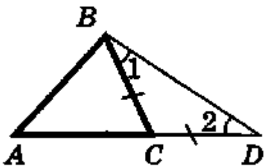
Опорная задача (***признак равностороннего треугольника по трем равным углам***)	**Если в треугольнике три угла равны, то он равносторонний.** *Доказательство.*
Опорная задача (***признак равнобедренного треугольника по совпадающим биссектрисе и медиане***) 	**Если в треугольнике биссектриса совпадает с медианой, то он равнобедренный.** *Доказательство.* *Указание:* удвойте медиану.
Полезная задача	*Докажите, что если биссектриса внешнего угла треугольника параллельна стороне треугольника, то треугольник равнобедренный.*

Неравенство треугольника

<table>
<tr>
<td>

Теорема

(*неравенство треугольника*)



</td>
<td>

Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других сторон.

Доказательство.

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Следствия

</td>
<td>

1. Для любых трех точек A, B и C, не лежащих на одной прямой, справедливы неравенства

$$AB < AC + CB,\ AC < AB + BC,\ BC < BA + AC.$$

Каждое из этих неравенств называется **неравенством треугольника.**

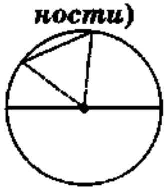
2. Для любых трех точек A, B и C справедливы неравенства $AB \le AC + CB$, $AC \le AB + BC$, $BC \le BA + AC$, т. е. расстояние между любыми двумя точками не больше суммы расстояний от них до третьей точки.

3. В треугольнике ABC любая сторона больше модуля разности двух других сторон:

$$AB > |AC - CB|,\ AC > |AB - BC|,\ BC > |BA - AC|.$$

Доказательство.

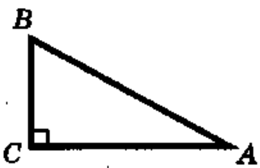
</td>
</tr>
</table>

Типовая задача	***Две стороны треугольника равны 0,8 см и 1,8 см. Какова длина третьей стороны, если она измеряется целым числом сантиметров?*** ***Решение.*** ***Ответ: 2 см.***
<u>Опорная задача</u> ***(о длинах хорды и диаметра окружности)*** 	**Любая хорда окружности не больше диаметра и равна диаметру только тогда, когда сама является диаметром.** *Доказательство.*

Полезная задача	*Докажите, что медиана треугольника меньше его полупериметра.*
Полезная задача	*Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, выходящих из той же вершины.*
Полезная задача	*Докажите, что любая сторона треугольника меньше его полупериметра.*
Полезная задача	*Докажите, что сумма медиан треугольника меньше периметра, но больше полупериметра.*

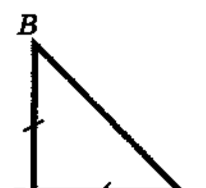
Прямоугольные треугольники

Свойства и признаки прямоугольных треугольников



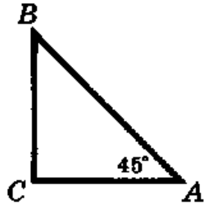
1. Сумма двух острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.
И обратно: **если в треугольнике сумма двух углов равна 90°, то этот треугольник – прямоугольный.**

Доказательство.

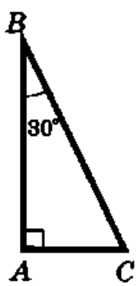


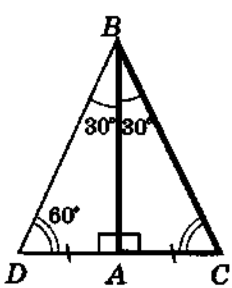
2. Острые углы прямоугольного равнобедренного треугольника равны 45°.
И обратно: если острый угол при основании равнобедренного треугольника равен 45°, то треугольник прямоугольный.

Доказательство.



<u>Опорная задача</u>
(*о прямоугольном треугольнике с углом* 30°)



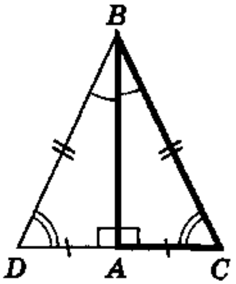


Катет прямоугольного треугольника, лежащий против угла в 30°, равен половине гипотенузы.

Доказательство.

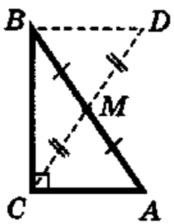
И обратно: **если катет прямоугольного треугольника равен половине гипотенузы, то угол, лежащий против этого катета, равен 30°.**

Доказательство.



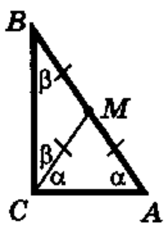
<u>Опорная задача</u>
(*о медиане, проведенной к гипотенузе*)

Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.
И обратно: **если в треугольнике медиана равна половине стороны, к которой она проведена, то этот треугольник – прямоугольный.**

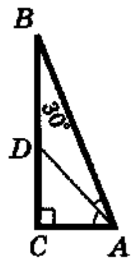


Доказательство.

1.



2.

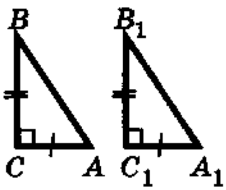
Типовая задача 	***В прямоугольном треугольнике катет, прилежащий к углу 30°, равен 48 см. Найдите длину биссектрисы другого острого угла.*** ***Решение.*** ***Ответ:* 32 *см.***
Полезная задача	***Докажите, что острый угол прямоугольного треугольника равен разности двух других его углов, и обратно: если разность двух углов треугольника равна третьему, то этот треугольник — прямоугольный.***
Полезная задача	***Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит его на два равнобедренных треугольника.***
Полезная задача	***Докажите, что высота прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, делит его на два прямоугольных треугольника с теми же острыми углами.***
Полезная задача	***Докажите, что угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе, равен разности острых углов прямоугольного треугольника.***

Полезная задача	***Докажите, что в прямоугольном треугольнике с неравными катетами биссектриса прямого угла делит угол между медианой и высотой, проведенными к гипотенузе, пополам.***

Теорема
(*признаки равенства прямоугольных треугольников*)

1. **По двум катетам.**

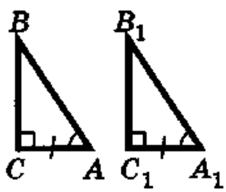
Если два катета одного прямоугольного треугольника соответственно равны двум катетам другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.



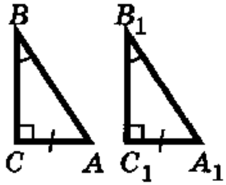
Доказательство.

2. **По катету и прилежащему острому углу.**

Если катет и прилежащий к нему острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и прилежащему к нему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

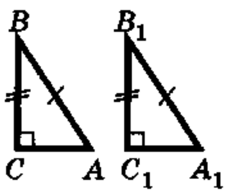


Доказательство.



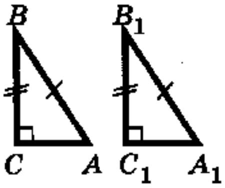
3. <u>По катету и противолежащему острому углу.</u>
Если катет и противолежащий острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны катету и противолежащему острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

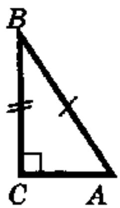
Доказательство.

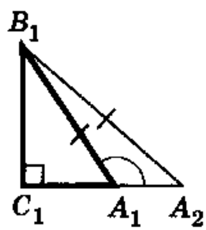


4. <u>По гипотенузе и острому углу.</u>
Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство.





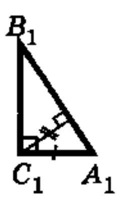


5. <u>По гипотенузе и катету.</u>

Если гипотенуза и катет одного прямоугольного треугольника соответственно равны гипотенузе и катету другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.

Доказательство.

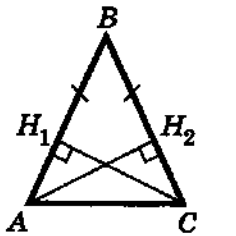
Типовая задача



Докажите равенство прямоугольных треугольников по катету и высоте, проведенной к гипотенузе.

Решение.

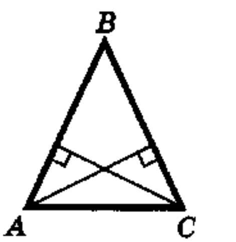
Опорная задача
(о равенстве двух высот в равнобедренном треугольнике)



В равнобедренном треугольнике высоты, проведенные к боковым сторонам, равны.

Доказательство.

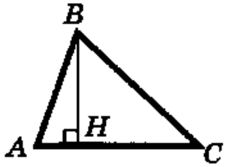
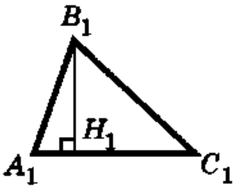
Опорная задача
(признак равнобедренного треугольника по равенству двух его высот)



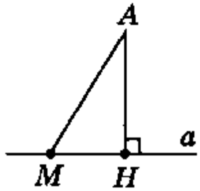
Если в треугольнике две высоты равны, то он равнобедренный.

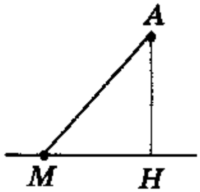
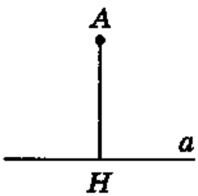
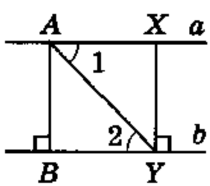
Доказательство.

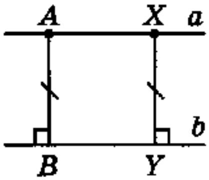
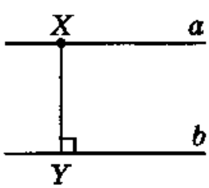
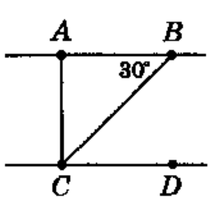
Замечание. Имеют место аналогичные утверждения для двух медиан (будет приведено в 8 классе) и двух биссектрис (теорема Штейнера-Лемуса, см. приложение в 8 классе).

<table>
<tr>
<td><u>Опорная задача</u>
(о равенстве соответствующих высот равных треугольников)

</td>
<td>В равных треугольниках высоты, проведенные к равным сторонам, равны.
Доказательство.</td>
</tr>
<tr>
<td>Полезная задача</td>
<td>Докажите, что в неравнобедренном треугольнике основание биссектрисы треугольника лежит между основаниями медианы и высоты, проведенных из той же вершины.</td>
</tr>
</table>

Расстояние от точки до прямой. Расстояние между параллельными прямыми

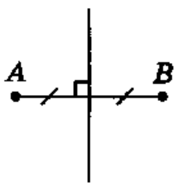
<table>
<tr>
<td>Определение наклонной
</td>
<td>AH – перпендикуляр, проведенный из точки A к прямой a.
AM – наклонная, проведенная из точки A к прямой a.</td>
</tr>
</table>

<u>Опорная задача</u> ***(о сравнении длины перпендикуляра и наклонной)*** 	**Перпендикуляр, проведенный из точки к прямой, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой прямой.** *Доказательство.*
Определение расстояния от точки до прямой 	**Расстоянием от точки до прямой называется длина перпендикуляра, проведенного из этой точки к прямой.** ***Замечание.*** **Расстояние от точки до прямой – наименьшее из расстояний от этой точки до точек прямой.**
<u>Теорема</u> ***(о множестве точек, равноудаленных от данной прямой)*** 	**Все точки каждой из двух параллельных прямых равноудалены от другой прямой.** **И обратно: все точки плоскости, расположенные по одну сторону от данной прямой и равноудаленные от нее, лежат на прямой, параллельной данной.** *Доказательство.* 1.

	2. ***Замечание.*** **Точка, движущаяся по одной из параллельных прямых, все время находится на одном и том же расстоянии от другой прямой.**
Определение расстояния между параллельными прямыми 	**Расстоянием между параллельными прямыми называется расстояние от произвольной точки одной из параллельных прямых до другой прямой.** ***Замечание.*** **Расстояние между параллельными прямыми равно наименьшему из расстояний от точек одной прямой до точек другой прямой.**
Типовая задача 	***Прямые AB и CD параллельны, $AB \perp AC$, $BC=12$ см, $\angle ABC=30°$. Найдите расстояния между прямыми AB и CD, между точкой C и прямой AB, между точкой B и прямой CD.*** *Решение.*

Серединный перпендикуляр. Биссектриса угла

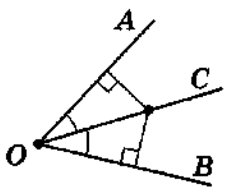
<u>**Опорная задача**</u>
(о множестве точек плоскости, равноудаленных от концов отрезка)



Серединный перпендикуляр (прямая, проходящая через середину отрезка перпендикулярно к нему) — множество точек плоскости, равноудаленных от двух данных точек.

Доказательство.

<u>Опорная задача</u>
(*о множестве точек плоскости, равноудаленных от сторон угла*)



Биссектриса угла – множество точек плоскости, лежащих внутри угла и равноудаленных от сторон этого угла.

Доказательство.

Полезная задача	*Что представляет множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных параллельных прямых?*
Полезная задача	*Что представляет множество всех точек плоскости, находящихся на заданном расстоянии от данной прямой?*
Полезная задача	*Что представляет множество всех точек плоскости, равноудаленных от двух данных пересекающихся прямых?*

Построение треугольника по трем элементам

Решение задач на построение	**Решить задачу на построение фигуры** – это значит найти конечную последовательность **элементарных построений**, после выполнения которых искомая фигура считается построенной, и доказать, что именно эта фигура обладает требуемыми в задаче свойствами.
Схема решения задач на построение: 1. Анализ. 2. Построение. 3. Доказательство. 4. Исследование.	1. **Анализ** условия задачи – построение эскиза искомой фигуры, с помощью которого устанавливается связь между ее элементами и данными задачи; составление плана построения искомой фигуры и краткая его запись. 2. **Построение** – осуществление плана, разработанного в ходе анализа. 3. **Доказательство** – обоснование того факта, что построенная фигура имеет заданную форму, а размеры и положение ее элементов соответствуют условию задачи. 4. **Исследование** – определение количества решений и условий существования (несуществования) искомой фигуры. Если задача простая, то некоторые этапы решения можно выполнять устно.
<u>**Опорная задача**</u> ***(о построении треугольника по двум сторонам и углу между ними)***	**Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.** *Решение.*

<u>**Опорная задача**</u> ***(о построении треугольника по стороне и двум прилежащим к ней углам)***	**Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.** *Решение.*
<u>**Опорная задача**</u> ***(о построении треугольника по трем сторонам)***	**Построить треугольник по трем сторонам.** *Решение.*

Типовая задача	***Постройте прямоугольный треугольник по гипотенузе и катету.*** ***Решение.***
Типовая задача	***Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, проведенной к одной из этих сторон.*** ***Решение.***

Типовая задача	***Постройте треугольник по стороне, прилежащему углу и проведенной к ней высоте.*** ***Решение.***

Дополнительные сведения и задачи по теме

СОДЕРЖАНИЕ

Для детей старше двенадцати лет.
В соответствии с Федеральным законом
от 29 декабря 2010 г. № 436-ФЗ.

Учебное издание

Ершова Алла Петровна
Голобородько Вадим Владимирович
Крижановский Александр Феликсович

Тетрадь-конспект по геометрии для 7 класса

Оформление обложки *А.А. Андреев*
Ответственный за выпуск *К.П. Бондаренко*
Компьютерная верстка *С.И. Удалов*

Подписано в печать 17.09.2014. Формат 70×90/16.
Усл.-печ. л. 7,02. Тираж 3000 экз. Заказ № ВЗК-04742-14.

ООО «Илекса», 107023, г. Москва, ул. Буженинова, д. 30, стр. 4,
сайт: www.ilexa.ru, E-mail: real@ilexa.ru,
телефон: 8(495) 964-35-67

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «Дом печати - ВЯТКА» в полном соответствии
с качеством предоставленных материалов.
610033, г. Киров, ул. Московская, 122.
Факс: (8332) 53-53-80, 62-10-36
http://www.gipp.kirov.ru, e-mail: order@gipp.kirov.ru